RUANG SAMPEL DAN KEJADIAN

Dalam Teori Probabilitas, percobaan (*experiment*) tidak selalu merupakan percobaan yang rumit tetapi seringkali percobaan sederhana dengan menggunakan alat-alat yang sederhana serta dapat juga dibayangkan untuk dilakukan dan tidak harus dilakukan di laboratorium.

Definisi I.1
Percobaan (*experiment*) adalah proses yang menghasilkan pengamatan (*observation*) atau ukuran (*measurement*).

Contoh I.1
Percobaan melempar mata uang logam satu kali dan diperhatikan mata uang yang muncul di bagian atas yaitu dapat berupa Gambar atau sering dinamakan 'Muka' (**M**) atau Angka yang sering dinamakan 'Belakang' (**B**).

Contoh I.2
Apabila kita memproduksi sekrup mesin maka akan ada kemungkinan beberapa diantaranya rusak sehingga kemungkinan hasil yang diperoleh adalah rusak (cacat) atau tidak rusak (tidak cacat).

Definisi I.2
Kejadian adalah hasil dari suatu eksperimen.

Definisi I.3
Suatu kejadian yang tidak dapat didekomposisikan dinamakan kejadian sederhana (*simple event*).

Contoh I.4
Kejadian melempar sebuah dadu dan mencatat angka yang muncul pada sisi atas dadu maka salah satu kejadian sederhananya kejadian

memperoleh mata dadu 3 dan kejadian sederhana yang lain adalah kejadian memperoleh mata dadu 2 dan seterusnya.

Definisi I.3
Kejadian adalah kumpulan dari satu atau lebih kejadian sederhana.

Contoh I.4
Kejadian melempar sebuah dadu dan mencatat angka yang muncul pada sisi atas dadu maka salah satu kejadian adalah kejadian memperoleh mata dadu yang merupakan bilangan prima.

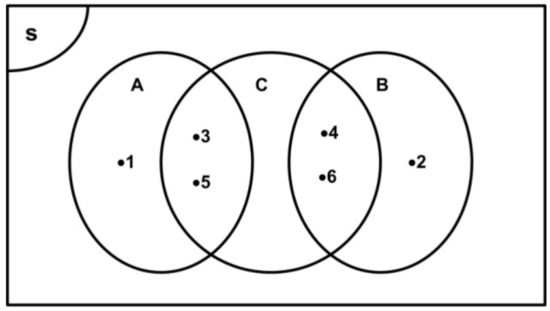
Himpunan semua kejadian sederhana dalam suatu eksperimen dinamakan ruang sampel (*sample space*). Secara grafik hubungan antara kejadian dan ruang sampel dinyatakan dalam suatu diagram yang dinamakan **diagram Venn**.

Definisi I.4
Dua kejadian A dan kejadian B dikatakan saling asing (*mutually exclusive*) jika satu kejadian terjadi dimana yang lain tidak mungkin terjadi dan sebaliknya.

Contoh I.5
Kejadian melempar sebuah dadu dan mencatat angka yang muncul pada sisi atas dadu. Ruang sampel S yang diperoleh adalah

$$S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}.$$

Kejadian A adalah kejadian memperoleh mata dadu yang merupakan bilangan ganjil sedangkan kejadian B adalah kejadian memperoleh mata dadu yang merupakan bilangan genap. Dalam hal ini, $A = \{ 1, 3, 5 \}$ dan $B = \{ 2, 4, 6\}$. Kejadian A dan kejadian B merupakan dua kejadian yang saling asing. Sedangkan bila kejadian C adalah kejadian memperoleh mata dadu yang merupakan bilangan prima yaitu $C = \{ 2, 3, 5\}$ maka kejadian A dan kejadian C tidak saling asing karena ada bilangan ganjil yang sekaligus bilangan prima. Hubungan antara kejadian A, B dan C dapat dinyatakan dalam diagram Venn pada Gambar I.1.



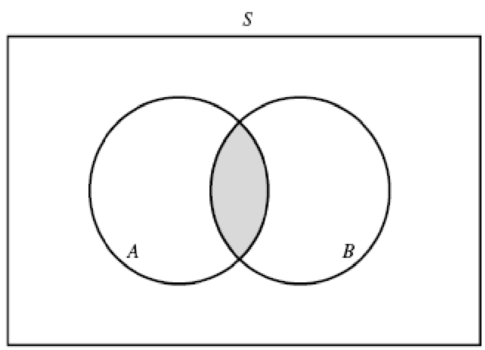
Gambar I.1 Hubungan antara himpunan *A*, *B* dan *C*.

Definisi I.5

Irisan dari kejadian A dan kejadian B yang dinotasikan dengan $A \cap B$ adalah kejadian yang menyatakan bahwa kejadian A dan kejadian B terjadi bersamaan. Secara notasi hal tersebut dinyatakan dengan :

$$A \cap B = \{ x \in S \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}.$$

Diagram Venn dari $A \cap B$ dinyatakan pada Gambar I.2.



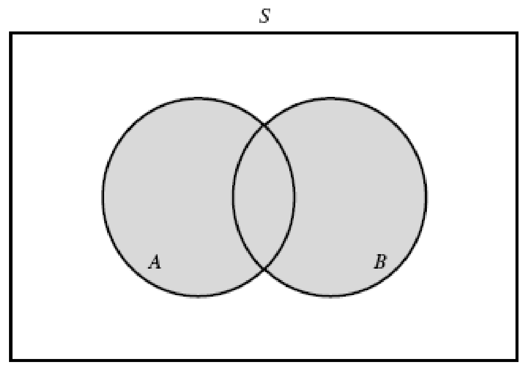
Gambar I.2 Irisan Himpunan *A* dan *B*

Definisi I.6

Gabungan dari kejadian A dan kejadian B yang dinotasikan dengan $A \cup B$ adalah kejadian yang menyatakan bahwa kejadian A atau kejadian B atau kedua kejadian tersebut terjadi. Secara notasi hal tersebut dinyatakan dengan :

$$A \cup B = \{ x \in S \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}.$$

Diagram Venn $A \cup B$ dinyatakan pada Gambar I.3.

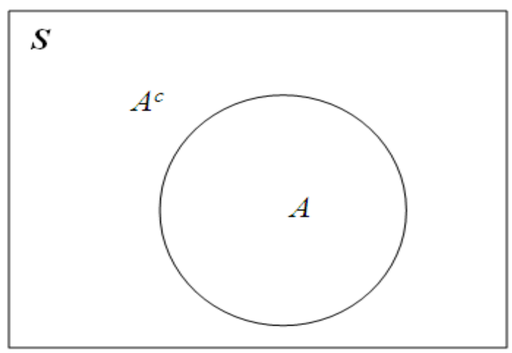


Gambar I.3 Gabungan Himpunan A dan B

Definisi I.7

Komplemen dari suatu kejadian A yang dinotasikan dengan A^c terdiri dari semua kejadian sederhana dalam ruang sampel S yang tidak berada dalam A. Secara notasi hal tersebut dinyatakan dengan :

$$A^c = \{ x \in S \mid x \notin A \}.$$



Gambar I.4 Himpunan A dan A^c.

Sifat-sifat operasi dari kejadian

1. $A \cap \varnothing = \varnothing$.
2. $A \cup \varnothing = A$.
3. $A \cap A^c = \varnothing$.

4. $A \cup A^c = S$.
5. $S^c = \varnothing$.
6. $\varnothing^c = S$.
7. $(A^c)^c = A$.

I.3 Analisis Kombinatorial

Dalam pembahasan pasal ini akan dibahas tentang analisis kombinatorial yang dapat digunakan untuk menghitung banyaknya titik sampel dalam ruang sampel atau dalam suatu himpunan (kejadian). Hal ini akan berguna dalam penentuan probabilitas suatu kejadian.

Aturan *mn*

Apabila dimiliki m elemen yaitu $a_1, a_2, \ldots, a_m$ dan n elemen yaitu $b_1, b_2, \ldots, b_n$ maka dapat dimungkinkan untuk membuat mn pasangan yang masing-masing mengandung satu elemen dari tiap kelompok.

Contoh I.6

Satu koin dan satu dadu dilempar bersamaan. Berapa banyak kejadian sederhana yang dapat diperoleh ?

Penyelesaian

Satu koin bila dilempar, mempunyai kemungkinan muncul 2 hasil yaitu muka (**M**) atau belakang (**B**), sedangkan satu dadu bila dilempar mempunyai kemungkinan muncul 6 hasil yaitu 1, 2, 3, 4, 5 atau 6. Hal itu berarti, apabila satu koin dan satu dadu dilempar bersamaan, maka banyak kejadian sederhana yang dapat diperoleh adalah 2(6) = 12 cara.

Aturan untuk membentuk pasangan, triplet dan seterusnya

Diberikan k kelompok, terdapat n_1 elemen di kelompok 1, n_2 elemen di kelompok 2, ….., n_k dalam kelompok ke-k, maka banyak cara memilih satu elemen dari masing-masing k kelompok adalah

$$n_1 \, n_2 \, \ldots . \, n_k.$$

Contoh I.7

Berapa banyak kejadian sederhana dalam ruang sampel ketika tiga koin dilemparkan secara bersamaan.

Penyelesaian

Karena tiap koin mempunyai 2 hasil yang mungkin maka untuk 3 koin yang dilemparkan secara bersamaan akan menghasilkan 2 (2) (2) = 8 cara.

Definisi I.8

Penyusunan dengan memperhatikan urutan dari *r* objek yang berbeda dinamakan permutasi. Banyaknya cara mengurutkan *n* benda yang berbeda yang diambil *r* sekaligus akan dinyatakan dengan P_r^n yaitu

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Contoh I.8

Misalkan dimiliki 3 huruf yang berbeda yaitu **A**, **B** dan **C**. Dari huruf tersebut akan dibuat 'kata' yang terdiri dari 2 huruf. Terdapat berapakah 'kata' yang terbentuk?

Penyelesaian

Karena tersedia 3 huruf yang berbeda dan akan dibentuk 'kata' yang mengandung 2 huruf dan diperhatikan urutannya. Kata yang terbentuk adalah **AB**, **BA**, **AC**, **CA**, **BC** dan **CB** yaitu terdapat 6 kata. Hal itu berarti merupakan permutasi $r = 2$ dari $n = 3$ yaitu $P_2^3 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6.$

Definisi I.9

Banyaknya kombinasi dari *n* objek yang diambil *r* sekaligus akan dinotasikan dengan

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{P_r^n}{r!}.$$

Contoh I.9

Misalkan pada Contoh I.8, urutan huruf yang terbentuk tidak diperhatikan sehingga akan diperoleh kombinasi 2 huruf dari 3 huruf yang tersedia yaitu AB, AC dan BC. Hal itu berarti banyaknya kombinasi yang terbentuk adalah

$$C_2^{\ 3} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{P_2^{\ 3}}{2!} = \frac{6}{2} = 3.$$

Permutasi yang dibuat dengan menyusun benda secara melingkar disebut *permutasi melingkar*. Dua permutasi melingkar dianggap sama, apabila diperoleh dua permutasi yang sama dengan cara permutasi dari suatu benda tertentu dan bergerak melingkar searah gerak jarum jam.

Teorema I.1

Banyak permutasi n benda berlainan yang disusun melingkar adalah $(n\text{-}1)!$

Contoh I.10

Ada berapa carakah 4 pohon yang berbeda dapat ditanam dan membentuk suatu lingkaran?

Penyelesaian

Karena terdapat 4 pohon yang berbeda dan akan ditanam membentuk lingkaran maka banyaknya cara menanamnya merupakan banyak permutasi melingkar dari $n = 4$ benda yaitu $(n\text{-}1)! = (4\text{-}1)! = 3! = 6$ cara.

Teorema I.2

Banyak cara dimana n bola yang berbeda dapat didistribusikan ke dalam k kotak yang berbeda adalah k^n.

Contoh I.11

Tentukan banyak cara 3 bola yang berbeda dapat didistribusikan ke dalam dua kotak yang berbeda.

Penyelesaian

Karena terdapat $n = 3$ bola yang berbeda maka tiga bola tersebut dapat didistribusikan ke dalam $k = 2$ kotak yang berbeda dengan 2^3 yaitu 8 cara.

Teorema I.3

Banyak cara bahwa n bola yang tidak dapat dibedakan dapat didistribusikan ke dalam k kotak, yang berbeda adalah

$$\binom{k+n-1}{n}.$$

Jika $n > k$ dan tidak satu kotakpun yang kosong maka

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

Contoh I.12

Berapa carakah 2 bola yang tidak dapat dibedakan didistribusikan ke dalam 3 kotak yang berbeda ? Berapa carakah 3 bola yang tidak dapat dibedakan dapat didistribusikan ke dalam dua kotak yang berbeda dan tidak satu kotakpun yang kosong ?

Penyelesaian

Karena ada n=2 bola yang tidak dapat dibedakan dan akan didistribusikan ke dalam k=3 kotak yang berbeda maka banyak cara untuk mendistribusikan adalah

$$\binom{k+n-1}{n} = \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6.$$

Karena terdapat n=3 bola yang tidak dapat dibedakan dan akan didistribusikan ke dalam 2 kotak yang berbeda dengan $n = 3 > k = 2$ serta tidak satu kotakpun kosong adalah

$$\binom{n-1}{k-1} = \binom{3-1}{2-1} = \binom{2}{1} = 2.$$

Teorema I.4

Banyak permutasi n benda yang berlainan bila n_1 diantaranya berjenis pertama, n_2 berjenis kedua, ..., n_K berjenis ke-K adalah

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!.....n_K!}$$

dengan $n = n_1 + n_2 + ... + n_K$.

Contoh I.13

Sebuah jalan dihiasi dengan dengan 9 bolam (bola lampu) yang dirangkai seri. Tentukan banyak cara menyusun 9 bola lampu itu bila tiga diantaranya berwarna putih, empat kuning dan dua biru.

Penyelesaian

Karena terdapat 9 bolam yang terdiri dari 3 bolam putih, empat bolam kuning dan 2 bolam biru maka banyak permutasi yang berlainan dari rangkaian bolam yang dirangkai seri adalah

$$\frac{9!}{3!4!2!} = 1260.$$

Teorema I.5

Banyaknya cara membuat sekat n benda dalam r sel yang masing-masing berisi n_1 elemen dalam sel pertama, n_2 dalam sel kedua, dan seterusnya adalah

$$\binom{n}{n_1 \;\; n_2 \;\; .... \;\; n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, ...\, n_r} .$$

Contoh I.14

Dua belas orang bepergian dengan tiga mobil dan masing-masing mobil dapat membawa 3, 4, dan 5 penumpang. Tentukan banyak cara yang dapat dibuat untuk membawa dua belas orang tersebut.

Penyelesaian

Karena terdapat 12 orang dan akan dibagi ke dalam 3 mobil yang masing-masing mobil berkapasitas 3, 4 dan 5 maka banyak cara untuk membawa 12 orang tersebut dengan 3 mobil tersebut adalah sama dengan banyak cara untuk membuat sekat 12 benda ke dalam 3 sel yang masing-masing berisi 3 , 4 dan 5 yaitu

$$\binom{12}{3, 4, 5} = \frac{12!}{3!\, 4!\, 5!} = 27.720$$

cara.

SOAL-SOAL & PENYELESAIAN

Soal 1

Misalkan percobaan memilih suatu bilangan bulat dari 1 sampai 3.

a. Tentukan ruang sampel dari percobaan ini.
b. Sebutkan kejadian sederhana yang mungkin.
c. Sebutkan kejadian-kejadian yang ada dalam percobaan ini.

Penyelesaian

a. Ruang sampel S = { 1, 2, 3 }.
b. Kejadian sederhana yaitu { 1 }, { 2} dan { 3 }.
c. Kejadian-kejadian yang mungkin adalam semua himpunan bagian dari ruang sampel S yaitu $\emptyset$, { 1 }, { 2 }, { 3 }, { 1, 2 }, {1, 3}, { 2, 3} dan {1, 2, 3}.

Soal 2

Buktikan bahwa

a. $A \cap \emptyset = \emptyset$.
b. $A \cap A^c = \emptyset$.

Bukti

a. Akan dibuktikan bahwa $A \cap \emptyset \subseteq \emptyset$.

   Ambil sebarang $x \in A \cap \emptyset$.

   Karena $x \in A \cap \emptyset$ maka $x \in A$ dan $x \in \emptyset$ sehingga $x \in \emptyset$.

   Akibatnya $A \cap \emptyset \subseteq \emptyset$.

   Akan dibuktikan bahwa $\emptyset \subseteq A \cap \emptyset$.

   Karena pernyataan $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A \cap \emptyset$ mempunyai anteseden yang bernilai salah maka implikasi tersebut akan selalu bernilai benar sehingga terbukti $\emptyset \subseteq A \cap \emptyset$.

b. Akan dibuktikan bahwa $A \cap A^c \subseteq \emptyset$ atau sama saja dengan membuktikan benarnya implikasi $x \in A \cap A^c \Rightarrow x \in \emptyset$.

   Karena tidak mungkin $x \in A$ dan sekaligus $x \in A^c$ yaitu x $\notin A$ maka anteseden dari implikasi $x \in A \cap A^c \Rightarrow x \in \emptyset$ selalu bernilai salah sehingga implikasi akan bernilai benar.

   Terbukti bahwa $A \cap A^c \subseteq \emptyset$.

   Akan dibuktikan bahwa $\emptyset \subseteq A \cap A^c$.

Karena pernyataan $x \in \varnothing \Rightarrow x \in A \cap A^c$ mempunyai anteseden yang bernilai salah maka implikasi tersebut akan selalu bernilai benar sehingga terbukti $\varnothing \subseteq A \cap A^c$.

Soal 3

Tentukan suku konstanta dalam ekspansi $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^9$.

Penyelesaian

Dengan menggunakan teorema binomial, diperoleh

$$\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^9 = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} (x)^k \left(\frac{1}{x^2}\right)^{9-k} = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} x^{3k-18}.$$

Suku konstantanya sama dengan 3*k*-18=0 sehingga *k* = 6. Akibatnya

$$\binom{9}{6} = \frac{9!}{3!6!} = 84.$$

Soal 4

Pada sebuah rak buku terdapat 5 buku matematika dan 4 buku kimia. Berapakah banyak cara supaya 2 buku matematika tertentu akan terletak berdampingan?

Penyelesaian

Apabila dianggap bahwa 2 buku matematika tertentu dapat digantikan sebagai 1 buku sehingga ada total 8 buku yang dapat diatur sehingga ada permutasi 8 buku dari 8 buku yang tersedia yaitu $P_8^8 = 8!$ cara dan diantara 2 buku tersebut dapat dibuat permutasi $P_2^2 = 2!$ sehingga total ada 8! 2! cara.

Soal 5

Berapa banyak salad buah yang bisa dibuat bila tersedia buah jambu air, nanas, semangka dan melon?

Penyelesaian

Setiap buah dapat dipilih atau tidak dipilih dalam pembuatan salad. Karena setiap cara dari 2 cara memperlakukan buah dapat dikaitkan dengan 2 cara dari memperlakukan buah yang lain maka banyak cara untuk memperlakukan 4 buah adalah 2^4 cara. Namun 2^4 juga termasuk kasus di mana bila tidak ada buah yang dipilih sehingga banyak salad yang dapat dibuat adalah $2^4 - 1 = 15$ cara.

Soal 6

Dari 8 pemain bulu tangkis terdapat 5 orang pemain putra dan akan dibentuk pasangan ganda campuran, ada berapa banyak pasangan yang dapat terbentuk ?

Penyelesaian

Karena ada 5 pemain bulutangkis putra dan 3 pemain bulu tangkis putri maka dapat dibuat $5 \times 3 = 15$ pasangan ganda campuran dalam permainan bulu tangkis.

Soal 7

Jika terdapat 10 titik dengan tidak ada tiga titik yang berada pada satu garis lurus, maka banyak segitiga yang dapat dibuat dengan ketiga titik sudutnya dipilih dari 10 titik tersebut?

Penyelesaian

Untuk membuat segitiga, diperlukan 3 titik yang tidak berada pada satu garis dan karena tidak ada tiga titik yang segaris maka dapat dibuat segitiga sebanyak kombinasi 3 dari sebanyak 10 buah yaitu

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = 120.$$

Soal 8

Jika 5 kartu diambil dari 1 dek kartu bridge tanpa pengembalian maka tentukan banyak cara yang mungkin. Apabila urutan pengambilan diperhatikan maka ada berapa cara yang mungkin ?

Penyelesaian

Karena 5 kartu diambil dari 1 dek kartu bridge maka banyak cara yang mungkin adalah merupakan kombinasi 5 kartu dari sebanyak 52 kartu yang tersedia

$$C_5^{52} = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5!47!}$$

Apabila urutan pengambilan diperhatikan maka banyak cara yang mungkin adalah merupakan permutasi 5 kartu dari sebanyak 52 kartu yang tersedia

$$P_5^{52} = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5!47!}.$$

Soal 9

Misalkan diketahui ada 4 orang dan dari 4 orang tersebut dipilih 3 orang yang akan duduk pada kursi yang membentuk lingkaran. Ada berapa banyak cara susunan yang mungkin dibuat ?

Penyelesaian

Langkah pertama adalah melakukan pemilihan 3 orang dari 4 orang yang tersedia sehingga banyaknya cara yang mungkin adalah

$$C_3^{\,4} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!1!} = 4.$$

Banyaknya cara untuk menyusun 3 orang yang duduk pada 3 kursi yang membentuk lingkaran adalah (3-1)! = 2! cara. Akibatnya banyak cara yang mungkin dibuat adalah 4 × 2 = 8 cara.

Soal 10

Tentukan nilai n yang memenuhi persamaan

$$\frac{(n+5)!}{(n+4)!} = 6n.$$

Penyelesaian

Karena

$$\frac{(n+5)!}{(n+4)!} = 6n$$

maka

$$\frac{(n+5)(n+4)!}{(n+4)!} = 6n$$

sehingga $n + 5 = 6n$ atau $n = 1$.

Soal 11

Tentukan P_3^n jika $\binom{n}{3} = 12n.$

Penyelesaian

Karena

$$\binom{n}{3} = 12n$$

maka

$$\binom{n}{3} = \frac{n!}{(n-3)!3!} = 12n$$

sehingga

$$\begin{aligned}
&\frac{n!}{(n-3)!} = 72n \\
&n(n-1)(n-2) = 72n \\
&(n-1)(n-2) = 72 \\
&n^2 - 3n + 2 = 72 \\
&n^2 - 3n - 70 = 0 \\
&(n+7)(n-10) = 0 \\
&n = -7,\ n = 10.
\end{aligned}$$

Karena n harus positif maka $n = 10$ sehingga $P_3^{10} = 120$.

Soal 12

Tentukan banyaknya diagonal pada segi 10.

Penyelesaian

Untuk membuat diagonal perlu 2 titik dan setiap dua titik itu hanya menjadi satu diagonal sehingga hal itu merupakan kombinasi 2 dari 10 titik yang tersedia. Di samping itu garis (diagonal pada sisi terluar) akan menjadi sisi segi 10 sehingga banyaknya diagonal yang terbentuk adalah

$$\binom{10}{2} - 10 = \frac{10!}{8!2!} - 10 = 45 - 10 = 35.$$

Soal 13

Jika $\binom{a}{5} = \binom{a}{7}$ dan $b = P_2^a$ maka tentukan nilai $a + b$.

Penyelesaian

Karena

$$\binom{a}{5} = \binom{a}{7}$$

maka a = 12 dan

$$b = P_2^{12} = 132$$

sehingga $a + b$ = 12 + 132 = 144.

Soal 14

Berapakah banyak cara menyusun huruf MATEMATIKA sehingga huruf T tidak berdekatan ?

Penyelesaian

Banyaknya cara menyusun huruf-huruf MATEMATIKA adalah

$$\frac{10!}{3!2!2!} = 151200.$$

Banyaknya cara menyusun huruf-huruf MATEMATIKA dengan syarat kedua T berdekatan adalah sama dengan banyaknya cara menyusun huruf-huruf MATEMATIKA, yaitu

$$\frac{9!}{3!2!} = 30240.$$

Banyaknya cara menyusun huruf-huruf MATEMATIKA dengan kedua T tidak berdekatan adalah 151200 − 30240 = 120960.

Soal 15

Tentukan nilai dari $\sum_{k=0}^{1007} 3^k \binom{1007}{k}$.

Penyelesaian

Karena

$$4^{1007} = (3+1)^{1007} = \binom{1007}{0} 3^0 + \binom{1007}{1} 3^1 + ... + \binom{1007}{1007} = \sum_{k=0}^{1007} 3^k \binom{1007}{k}$$

maka

$$\sum_{k=0}^{1007} 3^k \binom{1007}{k} = 4^{1007} = 2^{2(1007)} = 2^{2014}.$$

LATIHAN

1. Nyatakanlah pernyataan berikut ini benar atau salah.
   a. $(A - B) \cup B = B$.
   b. $(A \cup B) - A =$ B.
   c. $(A \cap B) \cap (A - B) = \varnothing$.
   d. $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.
2. Tuliskan anggota tiap ruang sampel berikut ini :
   a. himpunan bilangan bulat antara 1 dan 50 yang habis dibagi 7.
   b. himpunan $S = \{ x \mid x^2 + x - 6 = 0 \}$.
   c. himpunan hasil bila sebuah mata dadu dan mata uang dilantunkan sekaligus.
   d. himpunan $S = \{ x \mid x$ nama benua $\}$.
   e. himpunan $S = \{ x \mid 2x - 4 = 0$ dan $x > 5 \}$.
3. Gunakan cara aturan atau pernyataan untuk menjelaskan ruang sampal S yang terdiri atas semua titik dalam kuadran pertama di dalam suatu lingkaran yang berjari-jari 3 dengan pusat titik asal.
4. Diadakan suatu percobaan melantunkan sepasang dadu, satu dadu berwarna merah, yang lainnya hijau, hasil yang muncul kemudian dicatat.
   a. Tuliskan anggota ruang sampel S.
   b. Tuliskan anggota S yang berkaitan dengan kejadian A bahwa jumlah kurang dari S.
   c. Tuliskan anggota S yang berkaitan dengan kejadian B bahwa bilangan 6 muncul pada kedua dadu.
   d. Tuliskan anggota S yang berkaitan dengan kejadian C bahwa bilangan 2 muncul pada dadu hijau.
   e. Buatlah diagram Venn yang menunjukkan hubungan antara kejadian A, B, C dan S.
5. Suatu percobaan dilakukan untuk menentukan kandungan emas dalam sepotong logam. Tentukan ruang sampel dalam percobaan ini.
6. Sebuah kotak berisi 1 bola merah, 1 bola hijau dan 1 bola kuning. Satu bola diambil dari kota tersebut dan dicatat warna bolanya.
   a. Tentukan ruang sampel dari percobaan tersebut.

b. Tuliskan semua kejadian yang mungkin.

c. Jika R adalah kejadian memperoleh bola merah maka sebutkan R^c.

7. Percobaan mengukur lamanya waktu yang diperlukan sampai sebuah bola lampu pijar putus. Tentukan ruang sampel dari percobaan tersebut.
8. Bila $P = \{ X \mid 1 \leq X \leq 9 \}$ dan $Q = \{ Y \mid Y \geq 5 \}$ maka hitunglah $P \cap Q$ dan $P \cup Q$.
9. Apabila 5 kartu satu demi satu dipilih dari satu dek kartu (yang berisi 52 kartu) dan masing-masing kartu yang terambil dikembalikan maka ada berapa urutan kartu yang terbentuk? Apabila kartu kartu yang terambil tidak dikembalikan maka ada berapa urutan kartu yang terbentuk?
10. Berapa banyak cara untuk membuat permutasi huruf-huruf dalam kata KANTOR ?
    a. Apabila tidak ada batasan.
    b. Huruf pertama harus huruf hidup .
    c. Huruf pertama harus huruf mati (konsonan).
11. Tunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan bulat n dengan $n \geq 1$ berlaku sifat-sifat :
    a. $\binom{n}{n} = 1$. Interpretasikan hasilnya.
    b. $\binom{n}{0} = 1$. Interpretasikan hasilnya.
    c. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$. Interpretasikan hasilnya.
    d. $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.
    e. $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.
12. Ada berapa banyak bilangan positif genap terdiri dari 5 angka berbeda dapat dibuat jika tidak ada satu pun angka 6 dan angka ribuan haruslah angka 0?
13. Jika diketahui $P_4^n = 30 P_2^n$ maka tentukan nilai n.
14. Jika diketahui $\binom{n}{3} = 2n$ maka tentukan nilai $\binom{2n}{7}$.

15. Berapa banyakkah himpunan X yang memenuhi

$$\{ 1, 2 \} \subseteq X \subseteq \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \} \ ?$$

16. Tentukan koefisien x^2y^3 dari penjabaran $(2x\text{-}3y)^5$.
17. Sebuah plat mobil terdiri dari dua huruf di depan 4 angka di tengah dan dua huruf di belakang.
    a. Berapa banyak plat mobil yang dapat dibuat jika setiap huruf dan setiap angka dapat diulang ?
    b. Berapa banyak plat mobil yang dapat dibuat jika huruf tidak dapat diulang sedangkan angka dapat diulang ?
    c. Berapa banyak plat yang dapat dibuat dalam b sehingga angkanya lebih dari 5500 ?
18. Berapa banyak bilangan ganjil 3 angka yang dapat dibentuk dari angka 0, 1, 2, 3, 4 jika angka-angka tersebut dapat diulang tetapi angka pertama tidak boleh nol ?
19. Berapa banyak cara 3 laki-laki dan 3 perempuan dapat duduk dalam satu baris asalkan laki-laki dan perempuan berselang-seling? Berapa banyak jika hal tersebut disusun dalam bentuk melingkar?
20. Selesaikan untuk jumlahan berikut ini :
    a. $\binom{4}{0}+\binom{4}{2}+\binom{4}{4}$
    b. $\binom{6}{0}+\binom{6}{2}+\binom{6}{4}+\binom{6}{6}$
    c. $\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{2i}$
21. Tentukan banyaknya susunan huruf dari kata PRIVACY jika disyaratkan bahwa dua vokal harus berdekatan.
22. Lima huruf dari kata GOOGLE akan disusun. Ada berapa susunan yang mungkin dibuat ?
23. Jika terdapat 20 titik dengan tidak ada tiga titik yang berada pada satu garis lurus, maka berapakah banyaknya segitiga yang dapat dibuat dengan ketiga titik sudutnya dipilih dari 20 titik tersebut ?
24. Dalam suatu rapat yang terdiri dari 6 orang siswa (2 di antara kakak beradik) dalam posisi melingkar. Ada berapa formasi duduk melingkar yang bisa terbentuk jika kakak beradik tersebut :

a. harus berdekatan ?

b. tidak boleh berdekatan ?

25. Tentukan koefisien x^6y^5 dari penjabaran $(2x - 5y)^{11}$.

*****

PROBABILITAS

Teori probabilitas untuk ruang sampel berhingga menetapkan suatu himpunan bilangan yang dinamakan bobot dan bernilai dari 0 sampai 1 sehingga probabilitas terjadinya suatu kejadian dapat dihitung. Tiap titik pada ruang sampel dikaitkan dengan suatu bobot sehingga jumlah semua bobot sama dengan 1. Berikut ini aksioma-aksioma probabilitas yang nantinya akan digunakan dalam teori probabilitas.

Aksioma-aksioma probabilitas :

1. Untuk setiap kejadian A berlaku
$$P(A) \geq 0.$$
2. Untuk kejadian pasti S berlaku $P(S) = 1$.
3. Untuk semua kejadian yang saling asing $A_1, A_2, ...$, berlaku
$$P(A_1 \cup A_2 \cup .....) = P(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + ...$$

Definisi II.1

Probabilitas suatu kejadian A adalah jumlahan dari probabilitas kejadian sederhana.

Teorema II.1

Bila suatu percobaan dapat menghasilkan N macam hasil yang berkemungkinan sama dan bila tepat sebanyak n dari hasil berkaitan dengan kejadian A maka probabilitas kejadian A adalah $P(A) = n/N$.

Contoh II.1

Jika sebuah mata uang logam jujur dilemparkan sekali maka terdapat dua hasil yang mungkin yaitu diperoleh sisi 'Muka" (**M**) dan sisi 'Belakang' (B) masing-masing mempunyai kemungkinan yang sama untuk diperoleh sehingga probabilitas akan diperoleh sisi 'Muka' (**M**) adalah $P(\mathbf{M}) = ½$.

Contoh II.2

Bila sebuah mata uang dilantunkan dua kali maka ruang sampelnya adalah

$$S = \{\, \mathbf{MM}, \mathbf{MB}, \mathbf{BM}, \mathbf{BB} \,\}.$$

Bila mata uang yang digunakan setangkup maka tiap hasil mempunyai kemungkinan muncul sama. Tiap titik diberi bobot b sehingga $4b = 1$ atau $b = ¼$. Bila A menyatakan kejadian bahwa paling sedikit satu muka muncul maka $P(A) = ¾$.

Contoh II.3

Bila satu kartu ditarik dari satu kotak bridge berisi 52 kartu maka akan ditentukan peluang mendapatkan kartu hati. Banyaknya hasil yang mungkin adalah 52 dan 13 diantaranya adalah kartu hati. Probabilitas kejadian A menarik kartu hati adalah

$$P(A) = 13/52 = ¼.$$

Contoh II.4

Sebuah dadu dilemparkan sekali. Apabila dadu tersebut dipandang sebagai dadu jujur (dadu yang masing-masing sisinya terbuat dari bahan yang sama sehingga kemungkinan sisi-sisinya akan muncul di atas akan sama) maka probabilitas dadu akan menunjukkan angka 5 adalah

$$\text{P(diperoleh 5)} = 1/6.$$

Di samping itu, probabilitas munculnya angka 3 atau lebih adalah

$$\text{P(diperoleh 3 atau lebih)} = 4/6 = 2/3.$$

Contoh II.5

Sebuah keluarga baru mengatakan bahwa mereka menginginkan 2 orang anak dalam keluarga. Apabila keinginan tersebut terpenuhi maka urutan kelahiran yang bisa terjadi adalah **PP**, **PW**, **WP** dan **WW** dengan **W** = wanita dan **P** = Pria. Akibatnya jika anaknya akan wanita semua maka probabilitasnya adalah $P(\mathbf{WW}) = ¼$ yaitu 1 kemungkinan dari empat urutan kelahiran yang mungkin. Di samping itu, probabilitas diperoleh 1 wanita dan 1 pria adalah $P(\mathbf{WP} \text{ atau } \mathbf{PW}) = 2/4 = ½$.

Teorema II.2

Jika $A \subset B$ maka $P(A) \leq P(B)$ dan $P(B - A) = P(B) - P(A)$.

Bukti :

Karena $B = A \cup (B - A)$ dengan A dan $(B - A)$ saling asing maka

$$P(B) = P(A) + P(B - A)$$

sehingga

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

dan karena probabilitas maka $P(B - A) \geq 0$ sehingga $P(B)–P(A) \geq 0$ atau

$$P(B) \geq P(A).$$

Teorema II.3

Untuk setiap kejadian A berlaku $0 \leq P(A) \leq 1$.

Bukti :

Berdasarkan aksioma 1, maka $P(A) \geq 0$ dan karena untuk setiap kejadian A berlaku $A \subset S$ maka $P(A) \leq P(S) = 1$. Terbukti $0 \leq P(A) \leq 1$.

Teorema II.4

$P(\varnothing) = 0$.

Hal itu berarti bahwa kejadian mustahil mempunyai probabilitas 0.

Bukti :

Karena $S = S \cup \varnothing$ dan $S \cap \varnothing = \varnothing$ maka $P(S) = P(S) + P(\varnothing)$ sehingga $P(\varnothing) = 0$.

Teorema II.5

Jika A^c adalah komplemen dari kejadian A maka berlaku

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

Bukti

Karena $A \cup A^c = S$ dan $A \cap A^c = \varnothing$ maka

$$P(A) + P(A^c) = P(S)$$

atau $P(A) + P(A^c) = 1$ sehingga $P(A) = 1 - P(A^c)$.

Contoh II.6

Suatu mata uang setangkup dilempar berturut-turut sebanyak 6 kali. Misalkan kejadian E paling sedikit sekali muncul muka. Ruang sampel S mengandung $2^6 = 64$ titik sampel karena setiap lemparan dapat menghasilkan dua macam hasil (muka atau belakang). Bila E^c menyatakan kejadian bahwa tidak ada muka yang muncul maka kejadian tersebut adalah bila semua lantunan menghasilkan belakang yaitu $P(E^c) = 1/64$. Probabilitas paling sedikit sekali muncul muka adalah

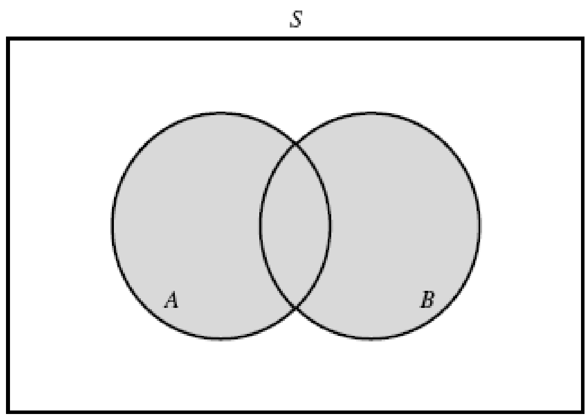
$$P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - 1/64 = 63/64.$$

Teorema II.6

Jika A dan B dua kejadian sebarang maka berlaku

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Bukti



Gambar II.1 Diagram Venn $A \cup B$.

Berdasarkan diagram Venn pada Gambar II.1 di atas, diperoleh

$$A \cup B = A \cup (B - (A \cap B))$$

dengan A dan $B - (A \cap B)$ adalah dua kejadian yang saling asing sehingga

$$P(A \cup B) = P(A) + P[B - (A \cap B)]$$

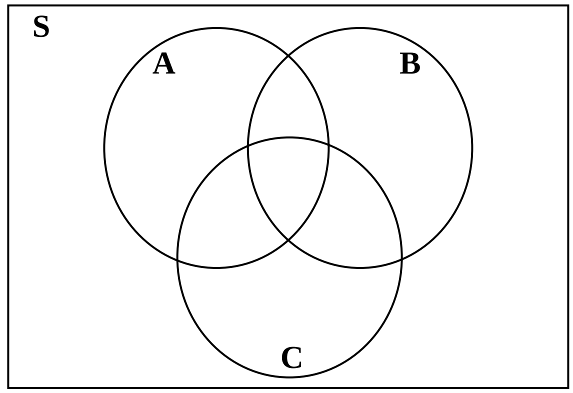
dan dengan hasil Teorema II.2 maka diperoleh

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Perluasan teorema ini dapat dinyatakan sebagai berikut :

Jika A, B dan C tiga kejadian sebarang maka berlaku sifat :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$



Gambar II.2 Diagram Venn $A \cup B \cup C$.

Contoh II.7

Diketahui $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/8$ dan $P(C) = ¼$. Apabila kejadian A, B dan C *mutually exclusive* maka

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &= (1/2) + (1/8) + (1/4) \\ &= 7/8. \end{aligned}$$

Di samping itu,

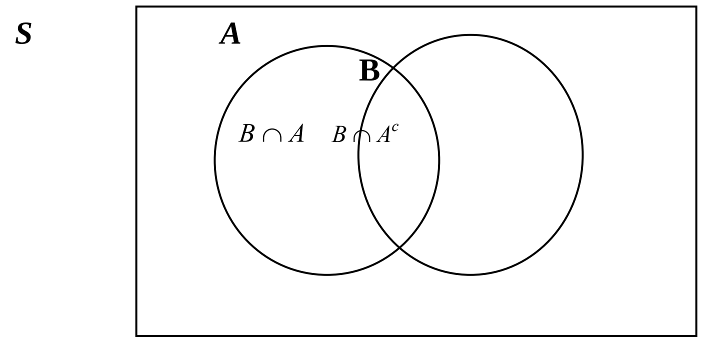
$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c \cap C^c) &= P(\,(A \cup B \cup C\,)^c) \\ &= 1 - P(A \cup B \cup C) \\ &= 1 - (7/8) \\ &= 1/8. \end{aligned}$$

Teorema II.7

Untuk dua kejadian sebarang A dan B berlaku

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c).$$

Bukti :



Gambar II.3 Hubungan antara himpunan B, $B \cap A$ dan $B \cap A^c$.

Berdasarkan diagram Venn pada Gambar II.3, terlihat bahwa

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$$

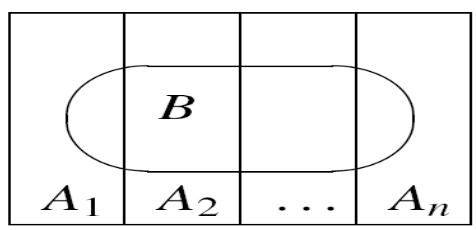
dan dua kejadian tersebut yaitu $A \cap B$ dan $A \cap B^c$ saling asing sehingga diperoleh

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c).$$

Secara umum, teorema di atas dapat dinyatakan sebagai

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + ... + P(B \cap A_n).$$

dan digambarkan dalam diagram Venn pada Gambar II. 4 berikut ini.



Gambar II.4 Hubungan antara himpunan B, A_1, A_2, …, A_n

Definisi II.2

Probabilitas bersyarat dari B diberikan bahwa A telah terjadi adalah

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

jika $P(A) > 0$.

Akibatnya, probabilitas bersyarat dari A diberikan bahwa B telah terjadi adalah

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B\cap A)}{P(B)}$$

jika $P(B) > 0$.

Definisi II.3
Dua kejadian A dan B dikatakan saling bebas (*independent*) jika dan hanya jika $P(A \mid B) = P(A)$ atau $P(B \mid A) = P(B)$.
Jika tidak demikian maka dua kejadian tersebut dikatakan saling bergantung (*dependent*).

Hukum Multiplikatif Probabilitas
Misalkan diketahui kejadian A dan kejadian B, probabilitas dari irisan $A \cap B$ adalah

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B|A) = P(B)\, P(A|B).$$

Jika A dan B saling bebas maka $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$.

Teorema II.8
Untuk tiga kejadian sebarang A, B dan C berlaku

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B \mid A)\, P(C \mid A \cap B).$$

Bukti :
Karena

$$P(C|A\cap B)=\frac{P(C\cap A\cap B)}{P(A\cap B)}$$

dan $P(B|A)=\dfrac{P(B\cap A)}{P(A)}$ sehingga

$$\begin{aligned}P(C|A\cap B)\,P(B|A)\,P(A)&=\frac{P(C\cap A\cap B)}{P(A\cap B)}\,\frac{P(B\cap A)}{P(A)}\,P(A)\\&=P(C\cap A\cap B)\\&=P(A\cap B\cap C).\end{aligned}$$

Sifat-sifat Probabilitas Bersyarat

1. Jika $A \subset B$ maka $P(A \mid C) \leq P(B \mid C)$.
2. $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$.
3. $P(A \cup B \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C) - P(A \cap B \mid C)$.
4. Secara umum berlaku hukum multiplikatif :

   $$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots. \cap A_n) = P(A_1)\, P(A_2 \mid A_1)\, P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \ldots.\, P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots. \cap A_{n\text{-}1}).$$

Contoh II.8

Sekotak buah berisi 20 apel dan 5 jeruk. Jika 2 buah diambil secara random berturut-turut maka berapakah probabilitasnya bahwa kedua buah yang terambil adalah apel ?

Penyelesaian :

Misalkan kejadian A adalah bahwa buah yang terambil pertama adalah apel sedangkan kejadian B adalah bahwa buah yang terambil kedua adalah apel. Akan ditentukan $P(A \cap B)$.

Karena $P(A)$=20/25 dan $P(B|A)$=19/24 maka dengan menggunakan hukum multiplikatif diperoleh

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B \mid A) = (20/25)\ (19/24) = 0{,}633.$$

Hal itu berarti bahwa kedua buah yang terambil merupakan apel adalah 0,633.

.

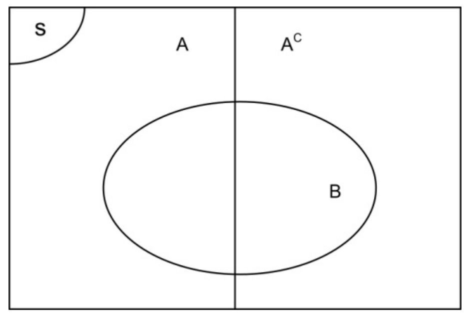
TEOREMA BAYES

Teorema Bayes

Misalkan dimiliki dua kotak yaitu kotak I dan kotak II. Dalam kotak I terdapat 10 bola yang terdiri dari 3 bola merah dan 7 bola putih sedangkan pada kotak II terdapat 15 bola yang terdiri dari 5 bola merah dan 10 bola putih. Apabila bola-bola tersebut disatukan dalam ember dan satu bola diambil secara random tanpa melihat dan ternyata berwarna merah, akan ditentukan probabilitasnya bahwa bola tersebut semula berasal dari kotak I. Karena keseluruhan terdapat 25 bola yang terdiri dari 10 bola dari kotak I dan 15 bola dari kotak II. Dari 25 bola tersebut, 8 bola berwarna merah dan 17 bola berwarna putih.

Misalkan kejadian B adalah kejadian mendapatkan bola berwarna merah dan kejadian A adalah kejadian mendapatkan bola dari kotak I. Probabilitas bersyarat yang diinginkan adalah

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$



Gambar II.5 Hubungan antara Himpunan B, A dan A^c

Kejadian B dapat ditulis sebagai gabungan dari dua kejadian yang terpisah yaitu $B \cap A$ dan $B \cap A^c$ sehingga

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$$

dan berarti

$$P(B) = P(B \cap A) \cup P(B \cap A^c)$$

Akibatnya

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\frac{P(B \cap A)}{P(B \cap A) + P(B\cap A^c)}$$

dan diperoleh

$$P(B\cap A)=\frac{3}{25},$$

$$P(B\cap A^C)=\frac{5}{25},$$

sehingga

$$P(A|B)=\frac{P(B \cap A)}{P(B \cap A) + P(B\cap A^c)}=\frac{3/25}{(3/25)+(5/25)}=\frac{3}{8}.$$

Dalam bentuk teorema Bayes, hal tersebut dapat dinyatakan dengan

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B\,|\,A)\,P(A) + P(B\,|\,A^c)\,P(A^c)}$$

$$= \frac{(3/10)(10/25)}{(3/10)(10/25)+(5/15)(15/25)}$$

$$= \frac{3}{8}.$$

Teorema II.5

Misalkan { A, A^c } suatu himpunan kejadian yang merupakan suatu sekatan sederhana dari ruang sampel S dengan $P(A) \neq 0$.

Misalkan B adalah suatu kejadian sembarang dalam S dengan $P(A) \neq 0$ maka berlaku

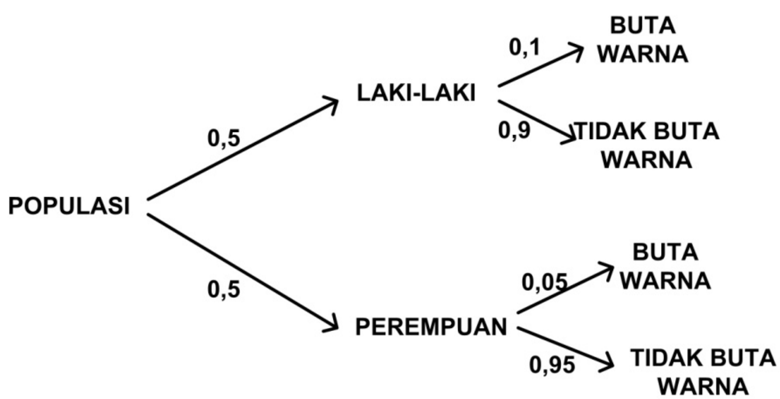
$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B\,|\,A)\,P(A) + P(B\,|\,A^c)\,P(A^c)}$$

Contoh II.9

Anggaplah bahwa dalam suatu populasi terdapat laki-laki dan perempuan dengan jumlah yang sama. Dalam populasi ini 10 % dari laki-laki dan 5 % dari wanita adalah buta warna. Seorang buta warna dipilih secara random berapa probabilitasnya orang laki-laki yang terpilih ?

Penyelesaian

Diagram pohon probabilitas yang bisa dibuat adalah



Gambar II.6 Diagram pohon probabilitas

Populasi terbagi ke dalam dua himpunan bagian yang saling asing yaitu laki-laki (kejadian **M**) dan perempuan (kejadian **F**). Akan dicari probabilitasnya orang laki-laki yang terpilih dengan syarat buta warna (**BW**). Dengan menggunakan teorema Bayes diperoleh

$$
\begin{aligned}
P(M|BW) &= \frac{P(BW\,|\,M)\,P(M)}{P(BW\,|\,M)\,P(M) + P(BW\,|\,F)\,P(F)} \\
&= \frac{(0{,}05)(0{,}5)}{(0{,}05)(0{,}5)+(0{,}0025)(0{,}5)} \\
&= \frac{2500}{2625}. \\
&= \frac{20}{21}.
\end{aligned}
$$

Secara umum, teorema Bayes dinyatakan dalam teorema berikut ini.

Teorema II.6

Misalkan { A_1, A_2, …, A_n } suatu himpunan kejadian yang merupakan suatu sekatan ruang sampel S dengan $P(A_i) \neq 0$ untuk $i = 1,2, \ldots, n$.

Misalkan B suatu kejadian sembarang dalam S dengan $P(B) \neq 0$ maka untuk $k = 1,2, \ldots, n$ berlaku

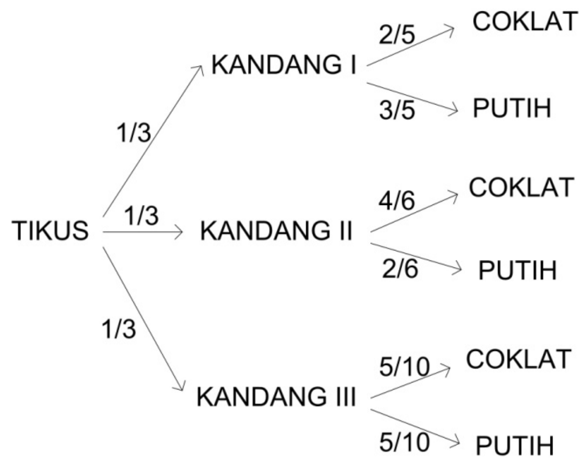
$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k \cap B)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)} = \frac{P(B|A_k)\,P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}\,.$$

Contoh II.10

Di suatu laboratorium terdapat 3 kandang tikus. Kandang I terdapat dua tikus coklat dan 3 tikus putih, kandang II terdapat empat tikus coklat dan 2 tikus putih dan kandang III terdapat 5 tikus coklat dan 5 tikus putih. Sebuah kandang dipilih secara random dan seekor tikus dipilih secara random dari kandang tersebut. Jika tikus yang terpilih berwarna putih, berapa probabilitas bahwa tikus yang terpilih berasal dari kandang I ?

Penyelesaian

Diagram pohon probabilitas yang bisa dibuat adalah



Gambar II.7 Diagram Pohon Probabilitas Contoh II.10

$$P(I\,|W)=\frac{P(W\,|\,I)\,P(I)}{P(W\,|\,I)\,P(I)+P(W\,|\,II)\,P(II)+P(W\,|\,III)\,P(III)}$$

$$=\frac{(3/5)(1/3)}{(3/5)(1/3)+(2/6)(1/3)+(5/10)(1/3)}$$

$$=\frac{1/5}{43/90}$$

$$=\frac{18}{43}.$$

SOAL-SOAL & PENYELESAIAN

Soal 1

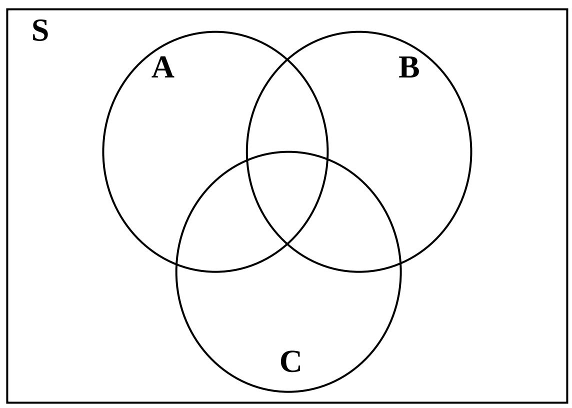
Apabila A menyatakan proyek ke-1 disetujui, B menyatakan proyek ke-2 disetujui dan C menyatakan proyek ke-3 disetujui.

Diketahui bahwa $P(A) = 0{,}22$, $P(B) = 0{,}25$, $P(C) = 0{,}28$, $P(A \cap B) = 0{,}11$, $P(A \cap C) = 0{,}05$, $P(B \cap C) = 0{,}07$ dan $P(A \cap B \cap C) = 0{,}01$. Nyatakan kejadian berikut ini dalam kata-kata dan hitunglah :

a. $A \cup B$
b. $A^c \cap B^c$
c. $A \cup B \cup C$
d. $A^c \cap B^c \cap C^c$

Penyelesaian

Berdasarkan informasi di atas maka dapat dibuat diagram Venn berikut probabilitas untuk masing-masing himpunan yang saling asing :



Gambar II.8 Diagram Venn $A \cup B \cup C$.

Akibatnya diperoleh :

a. $A \cup B$ menyatakan kejadian proyek ke-1 atau proyek ke-2 disetujui yaitu

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0{,}22 + 0{,}25 - 0{,}11 \\ &= 0{,}36. \end{aligned}$$

b. $A^c \cap B^c$ menyatakan kejadian proyek ke-1 tidak disetujui dan proyek ke-2 tidak disetujui yaitu

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P(\ (A \cup B)^c\ ) \\ &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - 0{,}36 = 0{,}64. \end{aligned}$$

c. $A \cup B \cup C$ menyatakan kejadian proyek ke-1 atau proyek ke-2 disetujui atau proyek ke-3 disetujui yaitu

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad - P(\ A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C) \\ &= 0{,}22 + 0{,}25 + 0{,}28 - 0{,}11 - 0{,}05 - 0{,}07 + 0{,}01 \\ &= 0{,}53. \end{aligned}$$

d. $A^c \cap B^c \cap C^c$ menyatakan kejadian proyek ke-1 tidak disetujui dan proyek ke-2 tidak disetujui dan proyek ke-3 tidak disetujui artinya ketiga proyek tidak disetujui yaitu

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c \cap C^c) &= P(\ (A \cup B \cup C)^c\ ) \\ &= 1 - P(A \cup B \cup C) \\ &= 1 - 0{,}53 \\ &= 0{,}47. \end{aligned}$$

Soal 2

Tunjukkan bahwa $P(\ A \cap B \mid C) = P(A \mid B \cap C)\ \mathrm{P}(B \mid C)$.

Penyelesaian

$$\begin{aligned} P(\ A|B \cap C)\ P(B|C) &= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(\ B \cap C)} \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \\ &= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(\ C)} \\ &= \frac{P((A \cap B) \cap C)}{P(\ C)} \\ &= P(\ A \cap B|C). \end{aligned}$$

Soal 3

Buktikan bahwa jika $P(B \mid A) > P(B)$ maka $P(A \mid B) > P(A)$.

Penyelesaian

Karena $P(B \mid A) > P(B)$ maka

$$\frac{P(B \cap A)}{P(A)} > P(B)$$

sehingga $P(B \cap A) > P(B)\,P(A)$. Akibatnya

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} > \frac{P(B)\,P(A)}{P(B)} = P(A).$$

Soal 4

Jika diketahui kejadian A dan B maka buktikan bahwa

a. $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$.
b. $P(A \cup B) = 1 - P(A^c \cap B^c)$.

Penyelesaian :

a. Karena $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ dan $A \cap B$ saling asing dengan $A \cap B^c$ maka

$$P(A) = P(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap B^c)$$

sehingga

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B).$$

b. $P(A \cup B) = 1 - P(\,(A \cup B)^c\,)$
$\quad = 1 - P(\,A^c \cap B^c\,)$.

Soal 5

Misalkan diketahui $P(A) = P(B) = 1/3$ dan $P(A \cap B) = 1/10$.

Tentukan :

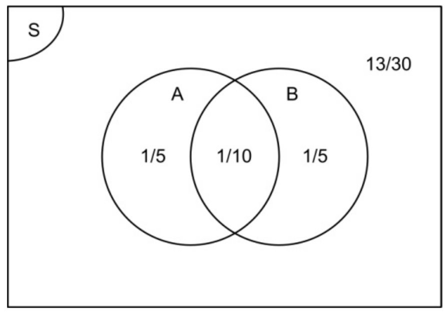
a. $P(B^c)$.
b. $P(A \cup B^c)$.
c. $P(B \cap A^c)$.
d. $P(A^c \cup B^c)$.

Penyelesaian :

Karena $P(A) = P(B) = 1/3$ dan $P(A \cap B) = 1/10$ maka

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= (1/3) + (1/3) - (1/10) \\ &= (10 + 10 - 3)/30 \\ &= 17/30 \end{aligned}$$

sehingga $P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 17/30 = 13/30$. Dengan mudah, hal tersebut dapat dinyatakan dalam diagram Venn pada Gambar II.9 berikut ini.



Gambar II.9 Diagram Venn

a. $P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - (1/3) = 2/3$.

b. $P(A \cup B^c) = P(A) + P((A \cup B)^c)$

$= (1/3) + (13/30)$

$= 23/30$.

Dalam hal ini, artinya $A \cup B^c$ kejadian A digabung dengan B^c sehingga sama artinya dengan kejadian A digabung dengan kejadian $(A \cup B)^c$ dengan kejadian A dan $(A \cup B)^c$ adalah dua kejadian yang saling asing.

c. $P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B)$

Dengan melihat diagram Venn, kejadian $B \cap A^c$ sama artinya dengan kejadian B tetapi tidak di kejadian $A \cap B$.

d. $P(A^c \cup B^c) = P((A \cap B)^c)$

$= 1 - P(A \cap B)$

$= 1 - (1/10)$

$= 9/10$.

Soal 6

Dalam populasi lalat buah yang dipelajari, terdapat 2 jenis mutasi yaitu mutasi sayap dan mutasi mata. Mutasi sayap terdapat 25 % populasi, 15 % mutasi mata dan 10 % mutasi keduanya. Jika seekor lalat dipilih secara random maka tentukan :

a. Jika lalat tersebut mempunyai mutasi sayap, berapakah probabilitasnya juga mempunyai mutasi mata?
b. Jika lalat tersebut mempunyai mutasi mata, berapakah probabilitasnya juga mempunyai mutasi sayap?
c. Berapakah probabilitasnya bahwa lalat tersebut paling sedikit mempunyai satu mutasi ?

Penyelesaian :

Misalkan W menyatakan bahwa lalat mengalami mutasi sayap dan E menyatakan bahwa lalat mengalami mutasi mata.

a. $P(E\,|\,W) = \dfrac{P(E \cap W)}{P(W)} = \dfrac{0{,}10}{0{,}25} = \dfrac{2}{5}.$

b. $P(W\,|\,E) = \dfrac{P(W \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0{,}10}{0{,}15} = \dfrac{2}{3}.$

c. $P(W \cup E) = P(W) + P(E) - P(W \cap E)$
$= 0{,}25 + 0{,}15 - 0{,}10$
$= 0{,}30.$

Soal 7

Misalkan bahwa kejadian A dan B adalah kejadian-kejadian sehingga $P(A) = 0{,}8$ dan P(B) = 0,7.

(a) Apakah mungkin bahwa $P(A \cap B) = 0{,}1$? Beri alasan.
(b) Berapakah nilai terkecil untuk $P(A \cap B)$?
(c) Apakah mungkin bahwa $P(A \cap B) = 0{,}777$? Beri alasan.
(d) Berapakah nilai terbesar untuk $P(A \cap B)$?

Penyelesaian :

a) Karena
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= 0{,}8 + 0{,}7 - P(A \cap B)$
$= 1{,}5 - P(A \cap B)$
dan $P(A \cup B) \leq 1$ maka $P(A \cap B)$ tidak mungkin sama dengan 0,1.
b) Nilai terkecil untuk $P(A \cap B)$ adalah 0,5.
c) Karena $A \cap B \subset A$ dan $A \cap B \subset$ B maka

$$P(\, A \cap B\,) \leq P(A) = 0{,}8$$

dan $P(A \cap B) \leq P(B) = 0{,}7$ sehingga $P(A \cap B) \leq 0{,}7$. Berarti $P(A \cap B)$ tidak mungkin 0,777.

d) Nilai terbesar untuk $P(A \cap B)$ adalah 0,7.

Soal 8

Misalkan bahwa bahwa kejadian A dan B adalah kejadian-kejadian sehingga $P(A) + P(B) > 1$.

(a) Apakah nilai terkecil yang mungkin untuk $P(A \cap B)$?

(b) Apakah nilai terbesar yang mungkin untuk $P(A \cap B)$?

Penyelesaian :

a) Karena

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

maka dan $P(A \cup B) \leq 1$ maka $P(A \cap B)$ nilai terkecil yang mungkin adalah $P(A) + P(B) - 1$.

e) Karena $A \cap B \subset A$ dan $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \subset \mathrm{B}$ maka

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \leq \mathrm{P}(\mathrm{A})$$

dan $P(A \cap B) \leq P(B)$ sehingga $P(A \cap B) \leq \min\{P(A), P(B)\}$.

Berarti nilai terbesar dari $P(A \cap B)$ adalah $\min\{P(A), P(B)\}$.

Soal 9

Dapatkah A dan B saling asing jika $P(A) = 0{,}4$ dan $P(B) = 0{,}7$? Dapatkah A dan B saling asing jika $P(A) = 0{,}4$ dan $P(B) = 0{,}3$? Beri alasan.

Penyelesaian :

Jika $P(A) = 0{,}4$ dan $P(B) = 0{,}7$ dan kejadian A, B saling asing maka

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}4 + 0{,}7 = 1{,}1$$

sehingga A dan B tidak mungkin saling asing sedangkan jika $P(A) = 0{,}4$ dan $P(B) = 0{,}3$ dan kejadian A, B saling asing maka

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}7.$$

Berarti hal itu dimungkinkan sehingga A dan B mungkin saling asing.

Soal 10

Jika A dan B saling bebas maka tunjukkan bahwa

a. A^c dan B juga saling bebas.

b. A dan B^c juga saling bebas.

c. A^c dan B^c juga saling bebas.

Bukti

a. Karena $A^c \cap B = B - (A \cap B)$ dan maka

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

dan karena A dan B saling bebas maka $P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$ sehingga

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(B) - P(A)\ P(B) \\ &= P(B)\ (1 - P(A)) \\ &= P(B)\ P(A^c) \\ &= P(A^c)\ P(B). \end{aligned}$$

Hal itu berarti, kejadian B dan A^c saling bebas.

b. Analog dengan a.

c. Karena $\begin{aligned}[t] P(A^c \cap B^c) &= P(\ (A \cup B)^c\ ) \\ &= 1 - P(\ A \cup B\ ) \\ &= 1 - (\ P(A) + P(B) - P(A \cap B\ )\ ) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)\ P(B) \\ &= (\ 1 - P(A))\ (1 - P(B)) \\ &= P(A^c\ )\ P(B^c\ ) \end{aligned}$

dengan mengingat A dan B saling bebas.

Soal 11

Misalkan $n(X)$ menyatakan banyaknya anggota himpunan X.
Jika $n(A \cup B) = 10$ dan $n(A) = 4$, maka tentukan nilai yang mungkin untuk $n(B)$.

Penyelesaian

Karena $n(\text{A} \cup \text{B}) = n(\text{A}) + n(B) - n(A \cap \text{B})$ maka

$$10 = 4 + n(B) - n(A \cap \text{B})$$

$$n(B) - n(A \cap \text{B}) = 6$$

sehingga $0 \le\ n(A \cap \text{B}) \le n(B)$ atau $0 \le n(A \cap \text{B}) \le 4$. Akibatnya

$$6 \le n(B)\ \le 10.$$

Karena $n(B)$ adalah bilangan bulat tak negatif maka $n(B) = 6, 7, 8, 9$ atau 10.

Soal 12

Sebuah titik (x,y) diambil secara random dari dalam persegi panjang dengan titik sudut (0,0), (2,0), (2,1) dan (0,1). Berapakah probabilitas bahwa $x < y$?

Penyelesaian

Persegi panjang yang dimaksudkan dinyatakan dalam daerah yang diarsir dengan luas 2 satuan luas. Luas bagian di sebelah kiri garis $y = x$ ditunjukkan pada gambar dengan luas ½. Hal itu berarti bahwa titik (x,y) yang dipilih secara random dalam persegi panjang akan memiliki $x < y$ adalah (1/2)/2 = ¼.

Soal 13

Misalkan S adalah kumpulan permutasi dari bilangan 1, 2, 3, 4, 5 dengan suku pertama permutasi tersebut bukan 1. Sebuah permutasi dipilih secara random dari S. Probabilitas bahwa suku kedua dari permutasi yang dipilih adalah 2, dalam bentuk paling sederhana adalah a/b. Berapakah $a + b$?

Penyelesaian

Karena bilangan 1 tidak bisa menjadi suku pertama maka banyaknya cara membuat urutan permutasi yang dapat diterima adalah

$$4.4.3.2.1=96.$$

dan banyaknya cara sehingga angka 2 berada pada suku kedua dari permutasi yang dapat diterima adalah

$$3.1.3.2.1=18.$$

Akibatnya probabilitas bahwa 2 akan muncul sebagai suku kedua pada permutasi yang dapat diterima adalah 18/96 = 3/16. Hal itu berarti

$$a + b = 3 + 16 = 19.$$

Soal 14

Misalkan bahwa seorang perempuan dengan golongan darah tipe **O** dan golangan darah **AB** mempunyai pasangan kembar laki-laki dengan golongan darah tipe **B**. Jika diketahui bahwa mendekati seperempat dari semua pasangan kembar berasal dari satu telur, berapa probabilitasnya bahwa pasangan kembar ini berasal dari satu telur ?

Penyelesaian

Misalkan kejadian E adalah kejadian bahwa pasangan kembar berasal dari satu telur dan kejadian B adalah kejadian bahwa pasangan kembar anak mempunyai golongan darah tipe **B**. Akan ditentukan probabilitasnya bahwa pasangan kembar ini berasal dari satu telur dengan syarat bahwa pasangan kembar anak mempunyai golongan darah tipe **B** adalah

$$P(E|B) = \frac{P(B|E)P(E)}{P(B|E)P(E) + P(B|E^c)P(E^c)}$$

$$= \frac{(1/4)(1/2)}{(1/4)(1/2)+(3/4)(1/4)}$$

$$= \frac{1/8}{5/16}.$$

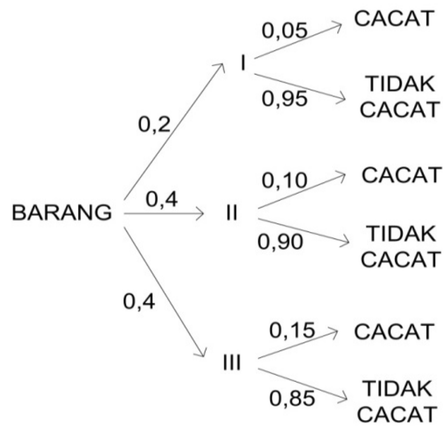
$$= \frac{2}{5}.$$

Soal 15

Tiga mesin **I**, **II** dan **III** masing-masing menghasilkan 20 %, 40%, 40% dari jumlah seluruh produksi. Dari masing- masing terdapat 5 % , 10 % dan 15 % produk yang cacat. Satu produk diambil secara random dan diperiksa dan ternyata cacat. Berapa probabilitas bahwa produk tersebut dihasilkan oleh mesin **I** ?

Penyelesaian

Berdasarkan informasi di atas, dapat dibuat diagram pohon probabilitas berikut ini :



Gambar II.10 Diagram Pohon Probabilitas

Akibatnya probabilitas bahwa produk tersebut dihasilkan oleh mesin **I** dengan syarat produk tersebut cacat adalah

$$
\begin{aligned}
P(I \mid D) &= \frac{P(D \mid I)\,P(I)}{P(D \mid I)\,P(I) + P(D \mid II)\,P(II) + P(D \mid III)\,P(I)} \\
&= \frac{(0,05)(0,2)}{(0,05)(0,2) + (0,1)(0,4) + (0,15)(0,4)} \\
&= \frac{0,01}{0,01 + 0,04 + 0,06} \\
&= \frac{1}{11}.
\end{aligned}
$$

LATIHAN

1. Jika $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ dan $P(A) < P(A|B)$ maka tunjukkan bahwa $P(B) < P(B|A)$.
2. Diketahui bahwa suatu ruang sampel dari 5 kejadian sederhana E_1, E_2, E_3, E_4 dan E_5.
   a. Jika $P(E_1) = P(E_2) = 0{,}15$, $P(E_3) = 0{,}4$ dan $P(E_4) = 2P(E_5)$ maka tentukan $P(E_4)$ dan $P(E_5)$.
   b. Jika $P(E_1) = 3P(E_2) = 0{,}3$ maka tentukan probabilitas dari kejadian sederhana yang lain jika diketahui bahwa ketiga kejadian yang lain mempunyai probabilitas yang sama untuk terjadi.
3. Jika dua kejadian A dan B sehingga $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}3$ dan $P(A \cap B) = 0{,}1$ maka tentukan :
   a. $P(A|B)$.
   b. $P(B|A)$.
   c. $P(A|A \cup B)$.
   d. $P(A|A \cap B)$.
   e. $P(A \cap B|A \cup B)$.
4. Misalkan A dan B adalah 2 kejadian dari ruang probabilitas berhingga S sehingga $P(A \cap B) = 1/5$, $P(A^c) = 1/3$ dan $P(B) = ½$.
   a. Tentukan $P(A \cup B)$.
   b. Tentukan $P(A^c \cap B^c)$.
5. Misalkan bahwa kejadian A dan B adalah kejadian-kejadian sehingga $P(A) = 0{,}6$ dan $P(B) = 0{,}3$.
   a. Apakah mungkin bahwa $P(A \cap B) = 0{,}1$? Beri alasan.
   b. Berapakah nilai terkecil untuk $P(A \cap B)$?
   c. Apakah mungkin bahwa $P(A \cap B) = 0{,}7$? Beri alasan.
   d. Berapakah nilai terbesar untuk $P(A \cap B)$?
6. Misalkan bahwa bahwa A dan B adalah kejadian-kejadian sehingga $P(A) + P(B) < 1$.
   a. Apakah nilai terkecil yang mungkin untuk $P(A \cap B)$?
   b. Apakah nilai terbesar yang mungkin untuk $P(A \cap B)$?
7. Jika A dan B adalah dua kejadian maka buktikan bahwa

$$P(A \cap B) \geq 1 - P(A^c) - P(B^c).$$

8. Jika A, B dan C adalah tiga kejadian maka buktikan bahwa
$$P(A \cap B \cap C) \geq 1 - P(A^c) - P(B^c) - P(C^c).$$
9. Jika A, B dan C adalah tiga kejadian yang mempunyai probabilitas yang sama maka berapakah nilai terkecil untuk $P(A)$ sehingga $P(A \cap B \cap C)$ selalu melebihi 0,95.
10. Disediakan 6 bilangan positif dan 8 bilangan negatif. Empat buah bilangan diambil secara random. Berapakah probabilitas bahwa perkalian empat bilangan tersebut akan merupakan bilangan positif ?
11. Jika x dan y adalah dua buah bilangan positif lebih dari 0 tapi kurang dari 4, berapakah probabilitas bahwa jumlah x dan y kurang dari 2 ?
12. Jika faktor positif dari 2014 diambil secara random, berapakah probabilitas yang terambil adalah bilangan bulat ?
13. Sebuah titik P dipilih secara random dari bagian dalam sebuah segi lima dengan titik sudut A(0,2), B(4,0), C($2\pi + 1$, 0), D($2\pi + 1$, 4) dan E(0,4). Berapakah probabilitas bahwa sudut APB adalah sebuah sudut tumpul ?
14. Pada sebuah dadu biasa, salah satu noktahnya dihilangkan secara random dengan kemungkinan yang sama bahwa setiap noktah akan terpilih. Dadu tersebut kemudian digulingkan. Berapakah probabilitas bahwa sisi yang muncul memiliki noktah berjumlah ganjil ?
15. Proporsi golongan darah **A**, **B**, **AB** dan **O** di suatu suku berturut-turut adalah 0,41; 0,10; 0,04 dan 0,45. Seseorang diambil dari populasi suku tersebut.
    a. Daftarlah ruang sampel dari eksperimen.
    b. Gunakan informasi tersebut untuk menentukan probabilitas dari masing-masing kejadian sederhana.
    c. Berapa probabilitas bahwa seseorang yang dipilih secara random dari populasi suku tersebut maka tentukan probabilitasnya mempunyai golongan darah **A** atau **AB**.
16. Suatu survei mengklasifikasikan sejumlah besar orang dewasa ke dalam apakah mereka perlu kaca mata baca dan apakah mereka

menggunakan kaca mata ketika membaca. Tabel berikut ini menyatakan proporsi dari masing-masing kategori :

Menggunakan kaca mata untuk membaca Perlu kaca mata	Ya	Tidak
Ya	0,44	0,14
Tidak	0,02	0,40

Jika seorang dewasa dipilih secara random dari sejumlah besar kelompok tersebut maka tentukan probabilitas kejadian yang didefinisikan sebagai berikut :

a. Perlu kaca mata.
b. Perlu kaca mata tetapi tidak menggunakan kaca mata.
c. Menggunakan kaca mata baik perlu kaca mata maupun tidak.

17. Jika diketahui kejadian A dan kejadian B sehingga $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}3$ dan $P(A \cap B) = 0{,}1$ maka tentukan :
    a. $P(A \mid B)$.
    b. $P(B \mid A)$.
    c. $P(A \mid A \cup B)$.
    d. $P(A \mid A \cap B)$.
    e. $P(A \cap B \mid A \cup B)$.
18. Jika A dan B adalah dua kejadian sehingga $B \subset A$ maka kenapa jelas bahwa $P(B) \leq P(A)$.
19. Misalkan bahwa $A \subset B$ dan $P(A) > 0$ dan $P(B) > 0$. Tunjukkan bahwa $P(B|A) = 1$ dan $P(A \mid B) = \dfrac{P(A)}{P(B)}$.
20. Jika A dan B dua kejadian yang saling asing dan $P(B) > 0$ maka tunjukkan bahwa :
$$P(A \mid A \cup B) = \frac{P(A)}{P(A) + P(B)}.$$
21. Jika $P(B) > 0$ maka :
    a. Tunjukkan bahwa $P(A|B) + P(A^c|B) = 1$.

b. Tunjukkan bahwa secara umum dua pernyataan berikut ini salah :
   (i) $P(A|B) + P(A|B^c) = 1$.
   (ii) $P(A|B) + P(A^c|B^c) = 1$.

22. Jika $P(B) = p$, $P(A^c|B) = q$ dan $P(A^c \cap B^c) = r$ maka tentukan :
    a. $P(A \cap B^c)$.
    b. $P(A)$.
    c. $P(B|A)$.
23. Tunjukkan bahwa untuk sebarang tiga kejadian A, B dan C dengan $P(C) > 0$ berlaku :
    $$P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C).$$
24. Jika kejadian A dan kejadian B saling bebas maka buktikan juga dua kejadian berikut juga saling bebas :
    a. A^c dan B,
    b. A dan B^c,
    c. A^c dan B^c.
25. Sebuah kotak berisi 3 kelereng dan 2 kelereng merah, sementara yang lain berisi 2 kelereng biru dan 5 kelereng merah. Sebuah kotak diambil secara random dari salah satu kotak adalah biru. Berapakah probabilitas bahwa kelereng biru tersebut berasal dari kotak pertama ?

*****