

6

# ANALISIS KORELASI DAN REGRESI

# ANALISIS KORELASI DAN REGRESI

## PENGANTAR

- Gagasan perhitungan ditetapkan oleh Sir Francis Galton (1822-1911).
- Persamaan regresi :Persamaan matematik yang memungkinkan peramalan nilai suatu peubah takbebas (*dependent variable*) dari nilai peubah bebas (*independent variable*).
- Regresi dan korelasi digunakan untuk mempelajari pola dan mengukur hubungan statistik antara dua atau lebih variabel.
- Jika digunakan hanya dua variabel disebut regresi dan korelasi sederhana.
- Jika digunakan lebih dari dua variabel disebut regresi dan korelasi berganda.

# PENGERTIAN **KORELASI**

Analisis Korelasi adalah Analisis statistika yang memanfaatkan hubungan antara dua atau lebih variable sehingga dapat diukur keeratannya.



## PENGERTIAN **KORELASI**

- Variabel yang akan diduga disebut variabel terikat (tidak bebas) atau **dependent variable**, biasa dinyatakan dengan **variabel Y**.
- Variabel yang menerangkan perubahan variabel terikat disebut variabel bebas atau **independent variable**, biasa dinyatakan dengan **variabel X**.
- Analisa korelasi digunakan untuk mengukur keeratan hubungan antara variabel-variabel tersebut.

## JENIS-JENIS PERSAMAAN REGRESI

- Regresi Linier :
  - Regresi Linier Sederhana
  - Regresi Linier Berganda
- Regresi Nonlinier
  - Regresi Eksponensial

## JENIS-JENIS PERSAMAAN REGRESI

- Regresi Linier :
- Bentuk Umum **Regresi Linier Sederhana**

$$Y = a + bX$$

- Y : peubah takbebas
- X : peubah bebas
- a : konstanta
- b : kemiringan

## JENIS-JENIS PERSAMAAN REGRESI

- Regresi Linier :
- Bentuk Umum **Regresi Linier Sederhana**

$$Y = a + bX$$

Y : peubah takbebas

X : peubah bebas

a : konstanta

b : kemiringan

- Bentuk Umum **Regresi Linier Berganda**

$$Y = a + b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_nX_n$$

Y : peubah takbebas

a : konstanta

$X_1$  : peubah bebas ke-1

$b_1$  : kemiringan ke-1

$X_2$  : peubah bebas ke-2

$b_2$  : kemiringan ke-2

$X_n$  : peubah bebas ke-n

$b_n$  : kemiringan ke-n

## REGRESI LINIER SEDERHANA

- Metode Kuadrat terkecil (*least square method*): metode paling populer untuk menetapkan persamaan regresi linier sederhana
- Bentuk Umum **Regresi Linier Sederhana**

$$Y = a + bX$$

Y : peubah takbebas

X : peubah bebas

a : konstanta

b : kemiringan



## REGRESI LINIER SEDERHANA

- Penetapan Persamaan Regresi Linier Sederhana

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} - b \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

n : banyak pasangan data  
 $y_i$  : nilai peubah takbebas Y ke-i  
 $x_i$  : nilai peubah bebas X ke-i

# REGRESI LINIER SEDERHANA (CONTOH)

Tahun	Biaya Promosi (Juta Rupiah) (x)	Volume Penjualan (Ratusan Juta Liter) (y)	xy	x <sup>2</sup>	y <sup>2</sup>
1992	2	5	10	4	25
1993	4	6	24	16	36
1994	5	8	40	25	64
1995	7	10	70	49	100
1996	8	11	88	64	121
<b>Σ</b>	<b>Σx = 26</b>	<b>Σy = 40</b>	<b>Σxy = 232</b>	<b>Σx<sup>2</sup> = 158</b>	<b>Σy<sup>2</sup> = 346</b>

$$n = 5$$

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} = \frac{(5 \times 232) - (26 \times 40)}{(5 \times 158) - (26^2)} = \frac{1160 - 1040}{790 - 676} = \frac{120}{114} = 1.0526 = 1.053$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} - b \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$a = \frac{40}{5} - \left( 1.05263... \times \frac{26}{5} \right) = 8 - (1.05263... \times 5.2) = 8 - 5.4736... = 2.5263... = 2.530$$

$$Y = a + bX \rightarrow Y = 2.530 + 1.053X$$

## REGRESI LINIER SEDERHANA (CONTOH)



Diketahui hubungan Biaya Promosi (X dalam Juta Rupiah) dan Y (Volume penjualan dalam Ratusan Juta liter) dapat dinyatakan dalam persamaan regresi linier pada contoh sebelumnya yaitu:

$$Y = 2,530 + 1,053 X$$

Perkirakan Volume penjualan jika dikeluarkan biaya promosi Rp. 10 juta?

Jawab:

$$Y = 2,530 + 1,053 X$$

Jika  $X = 10$ , maka

$$Y = 2,530 + 1,053 (10) = 2,530 + 10,53$$

$$Y = 13,06 \text{ (ratusan juta liter)}$$

## ANALISIS KORELASI LINIER SEDERHANA

- **ANALISA KORELASI** digunakan untuk mengukur kekuatan keamatan hubungan antara dua variabel melalui sebuah bilangan yang disebut **koefisien korelasi**.
- **Koefisien korelasi linier ( r )** adalah ukuran hubungan linier antara dua variabel/peubah acak X dan Y, dengan nilai antara 0 – 1.
- Bila dua peubah tidak berhubungan; korelasinya 0
- Bila sempurna korelasinya 1 (korelasinya linier)
- **KOEFISIEN DETERMINASI Sampel =  $R = r^2$**   
Ukuran proporsi keragaman total nilai peubah Y yang dapat dijelaskan oleh nilai peubah X melalui hubungan linier.

## MODEL PERSAMAAN KORELASI LINIER SEDERHANA

$$r = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)}{\sqrt{\left[ n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right] \left[ n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right]}}$$

$$R = r^2$$

## MODEL PERSAMAAN KORELASI LINIER SEDERHANA (CONTOH)

Tahun	Biaya Promosi (Juta Rupiah) (x)	Volume Penjualan (Ratusan Juta Liter) (y)	xy	x <sup>2</sup>	y <sup>2</sup>
1992	2	5	10	4	25
1993	4	6	24	16	36
1994	5	8	40	25	64
1995	7	10	70	49	100
1996	8	11	88	64	121
<b>Σ</b>	<b>Σx = 26</b>	<b>Σy = 40</b>	<b>Σxy = 232</b>	<b>Σx<sup>2</sup> = 158</b>	<b>Σy<sup>2</sup> = 346</b>

Dari contoh sebelumnya, setelah mendapatkan persamaan Regresi  $Y = 2,530 + 1,053 X$ , hitung koef. korelasi (r) dan koef determinasi (R).

$$r = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)}{\sqrt{\left[ n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right] \left[ n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right]}}$$

$$R = r^2$$

## MODEL PERSAMAAN KORELASI LINIER SEDERHANA (CONTOH)

$$\begin{aligned} r &= \frac{(5 \times 232) - (26 \times 40)}{\sqrt{[(5 \times 158) - (26^2)] \times [(5 \times 346) - (40^2)]}} = \frac{1160 - 1040}{\sqrt{[790 - 676] \times [1730 - 1600]}} \\ &= \frac{120}{\sqrt{114 \times 130}} = \frac{120}{\sqrt{14820}} = \frac{120}{121.73...} = 0.9857... \end{aligned}$$

Nilai  $r = 0.9857$  menunjukkan bahwa peubah X (biaya promosi) dan Y (volume penjualan) berkorelasi **linier yang positif dan tinggi**

$$R = r^2 = 0.9857^2 = 0.97165 = 97\%$$

Nilai  $R = 97\%$  menunjukkan bahwa 97% proporsi keragaman nilai peubah Y (volume penjualan) dapat dijelaskan oleh nilai peubah X (biaya promosi) melalui hubungan linier. Sisanya, yaitu 3% dijelaskan oleh hal-hal lain.

## REGRESI LINIER BERGANDA

- Pembahasan akan meliputi regresi linier dengan 2 atau lebih Variabel Bebas ( $X_1$ ,  $X_2$ , dan  $X_n$ ) dan 1 Variabel Tak Bebas ( $Y$ )

- Bentuk Umum **Regresi Linier Berganda**

$$Y = a + b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_nX_n$$

$Y$  : peubah takbebas

$a$  : konstanta

$X_1$  : peubah bebas ke-1

$b_1$  : kemiringan ke-1

$X_2$  : peubah bebas ke-2

$b_2$  : kemiringan ke-2

$X_n$  : peubah bebas ke-n

$b_n$  : kemiringan ke-n

- Untuk regresi linier berganda dengan 2 Variabel Bebas ( $X_1$  dan  $X_2$ ) dan 1 Variabel Tak Bebas ( $Y$ ).

$$Y = a + b_1X_1 + b_2X_2$$



# REGRESI LINIER BERGANDA



$$Y = a + b_1X_1 + b_2X_2$$

a , b<sub>1</sub> dan b<sub>2</sub> didapatkan dengan menyelesaikan tiga persamaan Normal berikut:

$$(i) \quad n a + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$(ii) \quad a \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i}x_{1i} = \sum_{i=1}^n x_{1i}y_i$$

$$(iii) \quad a \sum_{i=1}^n x_{2i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{2i}x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i}^2 = \sum_{i=1}^n x_{2i}y_i$$

n : banyak pasangan data

x<sub>1i</sub> : nilai peubah bebas X<sub>1</sub> ke-i

y<sub>i</sub> : nilai peubah takbebas Y ke-i

x<sub>2i</sub> : nilai peubah bebas X<sub>2</sub> ke-i

# REGRESI LINIER BERGANDA



Berikut adalah data Volume Penjualan (juta unit) Mobil dihubungkan dengan variabel biaya promosi ( $X_1$  dalam juta rupiah/tahun) dan variabel biaya penambahan asesoris ( $X_2$  dalam ratusan ribu rupiah/unit).

$X_1$	$X_2$	$y$	$X_1 X_2$	$X_1 y$	$X_2 y$	$X_1^2$	$X_2^2$	$y^2$
2	3	4	6	8	12	4	9	16
3	4	5	12	15	20	9	16	25
5	6	8	30	40	48	25	36	64
6	8	10	48	60	80	36	64	100
7	9	11	63	77	99	49	81	121
8	10	12	80	96	120	64	100	144

$$\sum x = 31 \quad \sum x = 40 \quad \sum y = 50 \quad \sum x_1 x_2 = 239 \quad \sum x_1 y = 296 \quad \sum x_2 y = 379 \quad \sum x_1^2 = 187 \quad \sum x_2^2 = 306 \quad \sum y^2 = 470$$

Tetapkan Persamaan Regresi Linier Berganda  $Y = a + b_1 X_1 + b_2 X_2$

## REGRESI LINIER BERGANDA

Masukkan notasi-notasi ini dalam ketiga persamaan normal,

$$(i) \quad n a + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$(ii) \quad a \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} x_{1i} = \sum_{i=1}^n x_{1i} y_i$$

$$(iii) \quad a \sum_{i=1}^n x_{2i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{2i} x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i}^2 = \sum_{i=1}^n x_{2i} y_i$$

Sehingga didapatkan tiga persamaan berikut:

$$\begin{array}{rclclcl} (i) & 6a & + & 31 b_1 & + & 40 b_2 & = & 50 \\ (ii) & 31 a & + & 187 b_1 & + & 239 b_2 & = & 296 \\ (iii) & 40 a & + & 239 b_1 & + & 306 b_2 & = & 379 \end{array}$$

Selesaikan persamaan diatas dengan cara substitusi atau eliminasi :  
Sehingga didapat nilai a, b1 dan b2

$$a = 0,95 \quad b_1 = 0,5 \quad b_2 = 0,75,$$

Sehingga Persamaan Regresi Berganda

$$Y = a + b_1 X_1 + b_2 X_2$$

$$Y = 0.75 + 0.50 X_1 + 0.75 X_2$$

# KORELASI LINIER BERGANDA



Koefisien Determinasi Sampel untuk Regresi Linier Berganda diberi notasi sebagai berikut:

$$R_{y.12}^2$$

Sedangkan Koefisien Korelasi adalah akar positif Koefisien Determinasi atau

$$r_{y.12} = \sqrt{R_{y.12}^2}$$

Model

$$R_{y.12}^2 = 1 - \frac{JKG}{(n-1)s_y^2}$$

JKG : Jumlah Kuadrat Galat

$s_y^2$  : Jumlah Kuadrat y (terkoreksi)

di mana

$$s_y^2 = \frac{n \sum y^2 - (\sum y)^2}{n(n-1)}$$

$$JKG = \sum y^2 - a \sum y - b_1 \sum x_1 y - b_2 \sum x_2 y$$

# KORELASI LINIER BERGANDA

Berikut adalah data Volume Penjualan (juta unit) Mobil dihubungkan dengan variabel biaya promosi ( $X_1$  dalam juta rupiah/tahun) dan variabel biaya penambahan asesoris ( $X_2$  dalam ratusan ribu rupiah/unit). Tentukan nilai  $R^2_{y.12}$  dan jelaskan artinya.

$X_1$	$X_2$	$Y$	$X_1 X_2$	$X_1 Y$	$X_2 Y$	$X_1^2$	$X_2^2$	$Y^2$
2	3	4	6	8	12	4	9	16
3	4	5	12	15	20	9	16	25
5	6	8	30	40	48	25	36	64
6	8	10	48	60	80	36	64	100
7	9	11	63	77	99	49	81	121
8	10	12	80	96	120	64	100	144

$$\sum x = 31 \quad \sum x = 40 \quad \sum y = 50 \quad \sum x_1 x_2 = 239 \quad \sum x_1 y = 296 \quad \sum x_2 y = 379 \quad \sum x_1^2 = 187 \quad \sum x_2^2 = 306 \quad \sum y^2 = 470$$

$$s_y^2 = \frac{n \sum y^2 - (\sum y)^2}{n(n-1)} = \frac{6(470) - (50)^2}{6(6-5)} = \frac{2820 - 2500}{30} = \frac{320}{30} = 10.667$$

## KORELASI LINIER BERGANDA



$$\begin{aligned}JKG &= \sum y^2 - a \sum y - b_1 \sum x_1 y - b_2 \sum x_2 y \\ &= 470 - 0.75(50) - 0.5(296) - 0.75(379) \\ &= 470 - 37.5 - 148 - 284.25 \\ &= 0.25\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_{y.12}^2 &= 1 - \frac{JKG}{(n-1)s_y^2} = 1 - \frac{0.25}{5 \times 10.667} = 1 - \frac{0.25}{53.333} \\ &= 1 - 0.0046875 \\ &= 0.9953125 \\ &= 99.53\%\end{aligned}$$

Nilai  $R_{y.12}^2 = 99.53\%$  menunjukkan bahwa 99.53% proporsi keragaman nilai peubah Y (volume penjualan) dapat dijelaskan oleh nilai peubah X (biaya promosi) dan  $XR_{y.122}^2$  (biaya aksesoris) melalui hubungan linier, sisanya sebesar 0.47% dijelaskan oleh hal-hal lain.